Inference at $*$ 1 0
of proof for Lemma order_functionality_wrt_iff:

1. T : Type
2. R : $T \to T \to \mathbb{P}$
3. R' : $T \to T \to \mathbb{P}$
4. $\forall x,\, y{:}T.\ R(x,y) \iff R'(x,y)$

$\vdash$ (Refl(T;x,y.$R(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R(x,y)$))
$\iff$ (Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$))
by PERMUTE{1:n,
2:n,
2:n,
2:n,
3:n,
4:n,
5:n,
6:n,
7:n,
8:n,
9:n,
10:n,
11:n,
12:n,
7:n,
13:n,
14:n,
15:n,
16:n,
7:n,
17:n,
18:n,
19:n,
20:n,
21:n,
7:n,
7:n,
8:n,
9:n,
10:n,
11:n,
12:n,
7:n,
22:n,
23:n}

1: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ (Refl(T;x,y.$R(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R(x,y)$)) ∈ ℙ
2: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ (Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$)) ∈ ℙ
3: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ Refl(T;x,y.$R(x,y)$) ∈ ℙ
4: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) ∈ ℙ
5: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ (Trans(T;x,y.$R(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R(x,y)$)) ∈ ℙ
6: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ (Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$)) ∈ ℙ
7: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ T ∈ Type
8: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ ($\lambda x,y.\ R(x,y)$) ∈ $T \to T \to$ ℙ
9: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ ($\lambda x,y.\ R'(x,y)$) ∈ $T \to T \to$ ℙ
10: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $x : T$
⊢ $x \in T$
11: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. $y : T$
⊢ $y \in T$
12: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
⊢ T ∈ Type
13: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ Trans(T;x,y.$R(x,y)$) ∈ ℙ
14: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash$ Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) $\in \mathbb{P}$
15: . . . . .wf. . . . NILNIL

$\vdash$ AntiSym(T;x,y.$R(x,y)$) $\in \mathbb{P}$
16: . . . . .wf. . . . NILNIL

$\vdash$ AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$) $\in \mathbb{P}$
17: . . . . .wf. . . . NILNIL

$\vdash$ $(\lambda y,x.\ R(x,y)) \in T \to T \to \mathbb{P}$
18: . . . . .wf. . . . NILNIL

$\vdash$ $(\lambda y,x.\ R'(x,y)) \in T \to T \to \mathbb{P}$
19: . . . . .wf. . . . NILNIL

5. T
6. $x : T$
$\vdash$ $x \in T$
20: . . . . .wf. . . . NILNIL

5. $y : T$
6. T
$\vdash$ $y \in T$
21: . . . . .wf. . . . NILNIL

5. T
$\vdash$ $T \in$ Type
22: . . . . .wf. . . . NILNIL

$\vdash$ (Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$))
=
(Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$))
23:

$\vdash$ (Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$))
$\iff$ (Refl(T;x,y.$R'(x,y)$) & Trans(T;x,y.$R'(x,y)$) & AntiSym(T;x,y.$R'(x,y)$))
.

---

http://www.nuprl.org/FDLcontent/p0_942988_/p121_80219_{order_functionality_wrt_iff}1_0.html